Points $\left(\frac{60}{60}\right)$

كليـــة التقنيـــــة الالكترونيـــة – طرابلـس

الجبر الخطي GS202

قسم الحاسب — خريف (2017)

الزمن ساعتان

Final Exam

الاســـم: الاجابة النموذجية — رقم القيد:

1. أكمل الفراغات في المربعات على اعتبار ان المصفوفة S مصفوفة متماثلة والمصفوفة K مصفوفة ملتوية التماثل بحيث يكون S + K = A؟

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Point $\left(\frac{9}{9}\right)$

2. أوجد مصفوفتين مختلفتين A , B من النوع 2*2 بحيث يكون:

$$AB = BA = I_2$$

Suppose $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

$$B = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Point $\left(\frac{4}{4}\right)$

3. أوجد قيمة x , y التي تجعل المصفوفة A مساوية لمعكوسها؟

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ x & y \end{bmatrix} \qquad AA^{-1} = I_2$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$16 - 3x = 1 \Rightarrow -3x = 1 - 6 \Rightarrow x = \frac{-15}{-3} = \boxed{5}$

$-12 - 3y = 0 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{-3} = \boxed{-4}$

Point $\left(\frac{3}{3}\right)$

Scanned by CamScanner

4. باستخدام خواص المحددات بيّن أنه أي قيمة ل x,y,z تجعل قيمة المحدد تنعدم؟

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$$

(1)

$$\xrightarrow{R_3 \to R_2+R_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to (x+y+z)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(1)

(2) من خلال الاختزال الأخير نجد أن أي قيمة ل x, y, z تجعل قيمة المحدد تساوي صفر وذلك لتساوي قيم الصف الأول بقيم الصف الثالث

Point $\left(\frac{4}{4}\right)$

---

5. أوجد قيم a التي تجعل المنظومة:

$$-3x+3y=1$$
$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y=a+\frac{2}{3}$$

i. لها عدد لا نهائي من الحلول.
ii. غير متوافقة.
iii. لها حل وحيد.

(2)

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & a+\frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{3}R_1+R_2]{R_1 \to -\frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & a+\frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

(i) يكون للمنظومة عدد لانهائي من الحلول عندما تكون $a=-5/9$ (2)

(ii) أي قيمة لـ a عدا $\left(-\frac{5}{9}\right)$ تجعل المنظومة غير متوافقة أي ليس لها حل (2)

(iii) لا توجد أي قيمة لـ a تجعل المنظومة لها حل وحيد (2)

Point $\left(\frac{8}{8}\right)$

Scanned by CamScanner

6. وجد المصفوفة B بحيث يكون $AB = BA = I_3$ علما بان:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = I_3 \Rightarrow A\bar{A}^1 = \bar{A}^1 A = I_3$$

$$|A| = -1$$

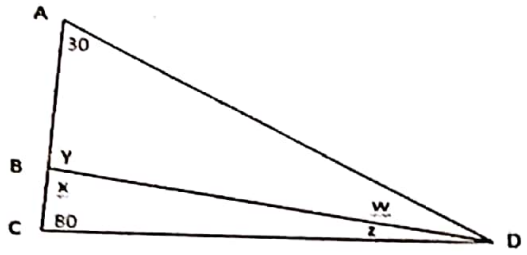
$$B = \bar{A}^1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الاجابة للفرد: أ.ب

Point $\left(\frac{9}{9}\right)$

Scanned by CamScanner

7. باستخدام طريقة اختزال جاوس لحل المعادلات الخطية، أوجد قيمة واحدة على الاقل للزوايا x,y,w,z على اعتبار ان المستقيم DB غير متعامد مع المستقيم AC وقيمة الزاوية w لا تساوي قيمة الزاوية z؟



الاجابة النموذجية

$$x + z = 100 \quad \rightarrow (1)$$

$$x + y = 180 \quad \rightarrow (2)$$

(2) $$y + w = 150 \quad \rightarrow (3)$$

$$w + z = 70 \quad \rightarrow (4)$$

(2)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 100 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 70 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 := -R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 80 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 70 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 := -R_2 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 70 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 := -R_3 + R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

From 3rd row $w + z = 70 \Rightarrow w = 70 - w$

Let $z = 10, 15, 20, 35$

(1) $w = 60, 55, 50, 35$

(1) $y - z = 80 \Rightarrow y = 80 + z$ $\quad y = 90, 95, 100, 115$

(1) $x + z = 100 \Rightarrow x = 100 - z$ $\quad x = 90, 85, 80, 65$

Point $\left(\frac{8}{8}\right)$

Scanned by CamScanner

8. أوجد نقطة تلاقي المستقيمان:

$$L_1 = r_1(t) = (i + 4\sqrt{3}\,j) + t(i + \sqrt{3}\,j) + t(i + \sqrt{3}\,j)$$
$$L_2 = r_2(u) = (4i + 3\sqrt{3}\,j) + u(i - \sqrt{3}\,j)$$

$$r_1(t) = r_2(u)$$

$$(i - 4\sqrt{3}j) + t(i + \sqrt{3}\,j) + t(i + \sqrt{3}\,j) = (4i + 3\sqrt{3}\,j) + u(i - \sqrt{3}\,j)$$

$$i - 4\sqrt{3}j + ti + \sqrt{3}\,tj + ti + \sqrt{3}\,tj - 4i - 3\sqrt{3}\,j - ui + \sqrt{3}\,uj = 0$$

بتجميع مركبات i, j كلاً على حدا

$$(2t - u - 3)i + (2\sqrt{3}\,t + \sqrt{3}\,u - 7\sqrt{3}) = 0$$

$$2t - u - 3 = 0 \Rightarrow 2t - u = 3. \longrightarrow [1] \quad (1)$$

$$2\sqrt{3}\,t + \sqrt{3}\,u - 7\sqrt{3}. = 0 \Rightarrow 2\sqrt{3}\,t + \sqrt{3}\,u = 7\sqrt{3} \longrightarrow [2] \quad (1)$$

من المعادلة [1] نجد أن:

$$u = 2t - 3$$

بالتعويض من [3] في [2]

$$2\sqrt{3}\,t + \sqrt{3}(2t - 3) = 7\sqrt{3}$$
$$2\sqrt{3}\,t + 2\sqrt{3}\,t - 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$
$$4\sqrt{3}\,t = 10\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{10\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{2}$$

من [3] نجد أن

$$u = 2\left(\frac{5}{2}\right) - 3 = 2 \quad (1)$$

$$\therefore \boxed{t = \frac{5}{2}} \text{ و } \boxed{u = 2} \quad (1)$$

$$u = 2 \Rightarrow r_2(2) \Rightarrow (4i + 3\sqrt{3}) + 2(i - \sqrt{3}\,j) = 6i + \sqrt{3}\,j$$

$$t = \frac{5}{2} \Rightarrow r_1\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow (i - 4\sqrt{3}\,j) + 5(i + \sqrt{3}\,j) = 6i + \sqrt{3}\,j$$

∴ نقطة تقاطع المستقيمين هي $\boxed{P(6, \sqrt{3})}$ (2) Point $\left(\frac{6}{6}\right)$

الدرجة النهائية: 10

Scanned by CamScanner

9. اوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A ؟

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & -7\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & 5-\lambda & 6\\ 0 & 0 & -7-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(5-\lambda)(-7-\lambda)=0$$

(1) (1) (1)

$\therefore \lambda_1=1 \ , \ \lambda_2=5 \ , \ \lambda_3=-7$

$(A-\lambda I \,|\, 0)$

For $\lambda_1=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$ (2)

$K_3=0 \ , \ K_2=0 \ , \ \text{Let } K_1=1 \Rightarrow K_{(1)}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

For $\lambda_2=5 \Rightarrow \begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -12\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$K_1-\frac{1}{2}K_2=0 \Rightarrow K_1=\frac{1}{2}K_2 \quad \text{Let } K_2=2 \Rightarrow K_1=1 \ , \ \text{let } K_3=0$

For $\lambda_3=-7 \Rightarrow \begin{bmatrix}8 & 2 & 3\\ 0 & 12 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$\therefore K_{(5)}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ (2)

$K_2+\frac{1}{2}K_3=0 \Rightarrow K_2=-\frac{1}{2}K_3 \quad \text{Let } K_3=4 \Rightarrow K_2=-2$

$K_1+\frac{1}{4}K_3=0 \Rightarrow K_1=-\frac{1}{4}K_3 \Rightarrow K_1=-1$

$\therefore K_{(-7)}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\4\end{bmatrix}$ (2)

Point $\left(\frac{9}{9}\right)$

بالتوفيق للجميع

Scanned by CamScanner